SESIÓN 14

DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCION, DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS Y LA CONCAVIDAD DE UNA CURVA APLICANDO EL CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

I. CONTENIDOS:

1. Derivadas sucesivas de una función
2. Concavidad de una curva
3. Determinación de máximos y mínimos por el criterio de la segunda derivada.
4. Ejercicios resueltos
5. Estrategias centradas en el Aprendizaje: Ejercicios propuestos

II. OBJETIVOS:

Al término de la Clase, el alumno:

- Comprenderá el concepto de derivada sucesiva de una función
- Entenderá en qué consiste la concavidad de una curva

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Cómo se representa una curva cóncava en el plano cartesiano?
- ¿En qué casos sería conveniente derivar dos veces una función?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Derivadas sucesivas de una función

A lo largo de nuestro curso sobre estudio del Cálculo, se ha visto que, en general la derivada de una función de la variable independiente x es así mismo una función de la variable x. Se puede dar que en un momento dado esta nueva función obtenida pueda también ser derivada, de ser así la derivada de esta primera derivada se le llama *segunda derivada* de la función original llamada también *función primitiva.* Sin embargo esta nueva derivada puede ser derivable, obteniéndose así la *tercera derivada* de la función primitiva y así sucesivamente hasta llegar a obtener la *enésima derivada* de dicha primitiva. Bajo este orden de ideas considere el siguiente ejemplo:

Sea la función: $y = 4x^5$

La primera derivada de esta función será: $\frac{dy}{dx} = 20x^4$

La segunda derivada de esta función es: $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 80x^3$

La tercera derivada es $\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 240x^2$, y así sucesivamente

La notación anterior resulta muy engorrosa por lo que se abrevian de la siguiente manera cuando se usa la notación de Leibnitz:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$, y así sucesivamente

Sin embargo esta notación se puede sustituir en forma abreviada de la siguiente manera

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = y''$, $\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = y'''$, Etc.

Esta será la notación que usaremos para indicar las derivadas sucesivas de una función. Así las derivadas sucesivas del ejemplo anterior se indicarían de la siguiente forma:

$y = 4x^5$, $y' = f'(x) = 20x^4$, $y'' = f''(x) = 80x^3$, $y''' = f'''(x) = 240x^2$,

$y^{IV} = y^{(4)} = 480x$, Etc.

Como se podrá ver esta notación resulta mucha más cómoda. Interpretación de las derivadas sucesivas de una función:
Hemos establecido que y' mide la intensida de cambio instantanea de la función original $y = f(x)$ con respecta a la variable independiente x , siendo y'' la derivada de y' nos proporciona la intensidad de cambio de y' con respecto a x. Si $y = f(x)$ y su gráfica describe una curva continua y además (x, y) nos representa cualquier punto de la gráfica, la primera derivada (y') nos da la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto considerado. De esta manera la segunda derivada (y'') nos representa la intensidad de cambio instantánea de la pendiente de la recta tangente con respecto a x en el punto dado (más adelante se ampliará este concepto al aplicar el método de la segunda derivada).

2.1. Definición de la concavidad de una curva

Dado un punto $P(x, y)$ sobre una curva continua, la pendiente de la recta tangente en P varía a medida que este punto se mueve. Cuando la tangente queda por debajo de la curva (ver gráfica 1) se dice que la curva es cóncava hacia arriba; si la tangente queda arriba de la curva (ver gráfica 2) la curva es cóncava hacia abajo. En la gráfica 1 observe que la pendiente de la tangente aumenta cuando P describe el arco AP' , por lo que y' es una función creciente de x. Por otro lado en la gráfica 2 cuando P al moverse hacia la izquierda forma el arco QB la pendiente decrece y y' es una función decreciente. Podemos observar por lo tanto que cuando, en el primer caso que y'' es positiva y en el segundo se torna negativa.

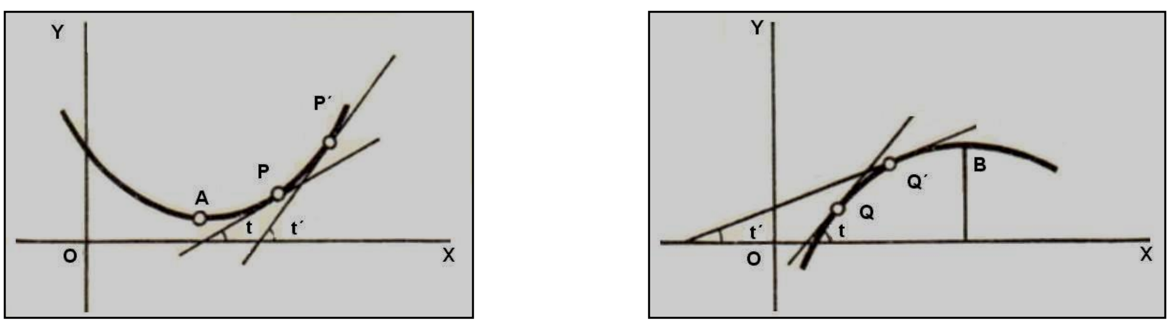


Fig. 1

De lo visto anteriormente podemos establecer el siguiente criterio para determinar el sentido de la concavidad de una curva en un punto determinado.

"*La gráfica de $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba si la segunda derivada de y con respecto a x es positiva; es cóncava hacia abajo si su segunda derivada es negativa*"

3.1. Determinación de los máximos y mínimos por el criterio de la segunda derivado

En el punto A de la gráfica 1, el arco es cóncavo hacia arriba y en su ordenada tiene un valor mínimo, aquí $y' = 0$ y'' es positiva. En el punto B de la gráfica 2, $y' = 0$ y y'' es negativa.

Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de máximos y mínimos de $f(x)$ que corresponden a los valores críticos de la variable son las que se enuncian a continuación:

La $f(x)$ tiene un máximo si $y' = 0$ y y'' es negativa (la concavidad de la curva es hacia abajo)

La $f(x)$ tiene un mínimo si $y' = 0$ y y'' es positiva (la concavidad de la curva es hacia arriba)

El procedimiento para la aplicación de este método se puede resumir en los siguientes pasos.

Primer paso. *Calcule la primera derivada de la función.*

Segundo paso. *Iguale la primera derivada a cero y resuélvase la ecuación resultante, las raíces obtenidas son los valores críticos de la variable.*

Tercer paso. *Obtenga la segunda derivada de la función.*

Cuarto paso. *Sustituya en la segunda derivada, el valor de la variable, cada uno de los valores críticos obtenidos, en el caso de que el resultado sea negativo, entonces la función tiene un máximo para dicho valor crítico, si por el contrario el resultado es positivo, la función tiene un valor mínimo para ese valor crítico*.

Si se da el caso que $y'' = 0$, o no exista este procedimiento no es aplicable en ese caso, aunque pueda darse el caso de que si exista un máximo o un mínimo, si se da esta situación, entonces se debe aplicar el método de la primer derivada. Se recomienda la aplicación del método de la segunda derivada cuando la obtención de esta no sea complicada o muy larga. Este método también falla cuando la curva es cerrada (por ejemplo, en un círculo) es estos casos se debe usar el método de la primer derivada.

4.1. Ejercicios resueltos

1. Obtenga todas las derivadas de la función definida por:

$y = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$

$y' = 32x^3 + 15x^2 - 2x$ Que es la primera derivada

$y'' = 96x^2 + 30x - 2$ Que es la segunda derivada

$y''' = 192x + 30$ Que es la tercera derivada

$y^{IV} = 192$ Que es la cuarta derivada

$y^{V} = 0$ Que es la quinta derivada

$y^{n} = 0$ Para toda $n \geq 5$

2. Obtenga la tercera derivada de la función definida por:

$y = 4x^3 - 6x^2 + 8$

$y' = 12x^2 - 12x + 0$ Que es la primera derivada

$y'' = 24x - 12$ Que es la segunda derivada

$y''' = 24$ Que es la tercera derivada

3. Obtenga la segunda derivada de la función implícita definida por:

$x^2 + y^2 = r^2$ si $r = constante$

Solución:

$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(r^2)$

$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$2y\frac{dy}{dx} = -2x$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ Que es la primera derivada

$y'' = -\frac{d}{x}\left(\frac{x}{y}\right) = -\left[\frac{y\cdot\frac{d(x)}{dx} - x\cdot\frac{d(y)}{dx}}{y^2}\right] = -\left[\frac{y - x\cdot\frac{dy}{dx}}{y^2}\right]$

$= -\left[\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}\right] = -\left[\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2}\right] = -\left[\frac{\frac{y^2+x^2}{y}}{x^2}\right]$

$= -\frac{x^2+y^2}{y^3}$ Sustituyendo $x^2 + y^2 = r^2$

$= -\frac{r^2}{y^3}$ Que es la segunda derivada de la función.

4. Sea $m(x)$ la pendiente de la recta tangente a la curva definida por la función:

$y = x^3 - 2x^2 + x$ en el punto (x, y), determine el cambio de $m(x)$ con respecto a x en el punto

$(2,2)$.

Solución:

$m(x) = \frac{dy}{dx} = y' = 3x^2 - 4x + 1$ Se obtiene la primera derivada

$y'' = 6x - 4$ El cambio de $m(x)$ con respecto a x viene dado por la segunda derivada

$y'' = 6(2) - 4 = 8$ Sustituyendo $x = 2$, por lo que este es el cambio de $m(x)$, en el punto considerado.

5. Determine los máximos y los mínimos de la función definida por $y = x(12 - 2x)^2$ aplicando el criterio de la segunda derivada:

Solución:

$y = x(12 - 2x)^2$ Función dada

Primer paso: $y' = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x-2)(x-6)$

Segundo paso $12(x-2)(x-6) = 0$, $x = 2$, $x = 6$ valores críticos

Tercer paso $y'' = 12(2x - 8) = 24(x - 4)$

Cuarto paso $y'' = 24(2-4) = 24(-2) = -48$ es un máximo

$y = 2(12 - 2(2))^2 = 2(12-4)^2 = +128$ altura de la ordenada

$y'' = 24(6-4) = 24(2) = +48$ es un mínimo

$y = 6(12 - 2(6)^2)^2 =$ +3600 Altura de la ordenada

6. Determine los máximos y los mínimos de la función definida por $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, aplicando el criterio de la segunda derivada. Solución:

$y' = 3x^2 - 6x - 9$

$3x^2 - 6x - 9 = 0$

$x_1 = -1$, $x_2 = -3$

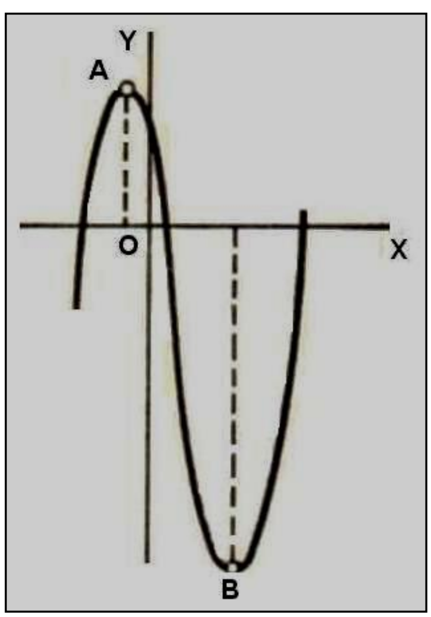
$y'' = 6x - 6$

$y'' = 6(-1) - 6 = -12$

$y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = 10 = ordenada\ en\ A = MÁXIMO$

$y = (-3)^3 - 3(-3)^2 - 9(-3) + 5 = -22 = ordenada\ en\ B = MÍNIMO$

Ver gráfica anexa: Fig. 2



5.1. ESTRATEGIAS CETRADAS EN EL APRENDIZAJE: Ejercicios propuestos.

1. Obtenga la tercera derivada de la función $y = 3x^4 - 2x^3 + 6x$

2. Obtenga la tercera derivada de la función $y = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$

3. Obtenga la segunda derivada de la función $y = (4 - x)^4$

4. Calcule los máximos y mínimos de las siguientes funciones aplicando el criterio de la 2ª. derivada y trace su gráfica:

a). $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ b). $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ c). $y = (2 - x)^3$ d). $y = (x^2 - 4)^2$